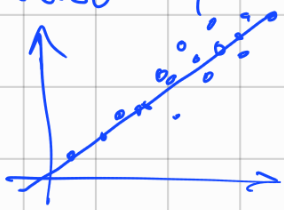
Linear Algebra in Data Science.

1. Метод наименьших квадратов (Linear Least Squares)
2. PCA (Principal Component Analysis)
   Метод главных компонент.
3. Рекомендательные системы
4. Cocktail party problem.

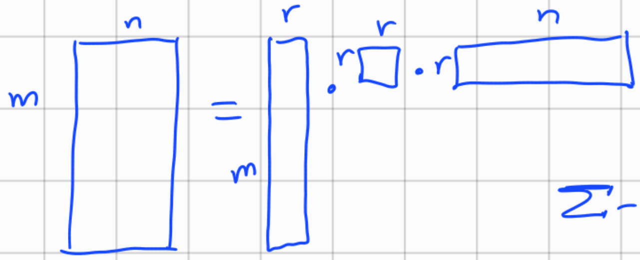


SVD

$r \le \min(n, m)$

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times r}{U} \cdot \underset{r\times r}{\Sigma} \cdot \underset{r\times n}{V^T}$$

r — ранг матрицы A



U, V — унитарные

$UU^T = I$, $VV^T = I$ → $U^{-1} = U^T$, $V^{-1} = V^T$

Σ — диагональная.

---

1. выбрать Θ: $\sum_{i=1}^{m} (\Theta^T x_i - y_i)^2 \to \min\limits_{\Theta \in \mathbb{R}^n}$

$m > n$

m - измерений
n - кол-во признаков

$$\|\underset{m\times n}{X}\,\underset{n\times 1}{\Theta} - \underset{m\times 1}{y}\|_2^2$$

лучшее, что мы можем сделать

$$X\Theta = y$$

не имеет анал. решения

т.к. X - прямоуг.

$$X^T \cdot \Big|\ \underset{m\times n}{X}\,\underset{n\times 1}{\Theta} = \underset{m\times 1}{y} \implies \cancel{\Theta = X^{-1} y}$$

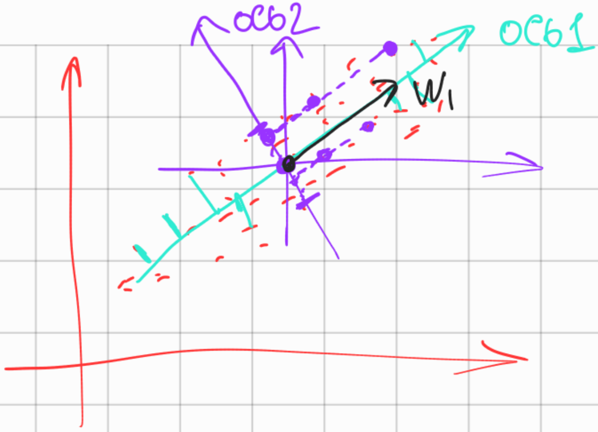
$$\underbrace{X^T \cdot X}_{n\times n}\Theta = \underbrace{X^T y}_{n\times 1} \implies \boxed{\Theta = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y}$$

псевдообратная к X

$$X^{+} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T, \quad m > n$$

пусть $m = n$, $\det X \neq 0$

$$X^{+} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T = X^{-1} \cdot (X^T)^{-1} \cdot X^T = X^{-1}$$



$$\text{ОСЬ } 1 > \text{ОСЬ} 2$$

Задача: найти „лучшую" ось для проекции данных на неё.

Данные: $\{a_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=1}^{m}$ m n-мерных векторов

Мы данные отцентровали: $\sum a_i = 0$ ← Вопрос выбора координат

Разумность выбора оси: МАКСИМИЗАЦИЯ РАЗБРОСА ПРОЕКЦИЙ

проекция вектора a_i на выбираемое напр w:

$$a_1^w = \|a_1\| \cos\alpha = \|a_1\| \frac{a_1^T \cdot w}{\|a_1\| \cdot \|w\|} = \frac{a_1^T w}{\|w\|}$$

Дисперсия

пусть проекции $\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_m$

$$Var = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \Pi_i\right)^2$$

0 (центрировали)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$w = \underset{w \in \mathbb{R}^n}{\arg\max} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i^T w}{\|w\|}\right)^2 = \arg\max \sum_{i=1}^{n} (a_i^T w)^2 =$$

$$= \arg\max \|Aw\|_2^2 = \underset{w}{\arg\max} \langle Aw, Aw \rangle =$$

$$= \underset{w}{\arg\max}\; w^T A^T A w = \underset{\|w\|=1}{\arg\max} \frac{w^T A^T A w}{w^T w}$$

Решение: w – СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР МАТРИЦЫ $A^T A$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma(A) = ?$$

$$A = I \cdot A \cdot I \implies \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 1 \end{array}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(A^T A) = (1, 4, 9)$$

$$\sigma(A) = (1, 4, 9)$$